ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM THANH TÙNG

VÀNH VÀ MÔĐUN HẦU COHEN-MACAULAY

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM THANH TÙNG

VÀNH VÀ MÔĐUN HẦU COHEN-MACAULAY

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 8460104

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. TRẦN NGUYÊN AN

THÁI NGUYÊN - 2019

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả trình bày trong luận văn này là không bị trùng lặp với các luận văn trước đây. Nguồn tài liệu sử dụng cho việc hoàn thành luận văn là các nguồn tài liệu mở. Các thông tin, tài liệu trong luận văn này đã được ghi rõ nguồn gốc.

Thái nguyên, tháng 5 năm 2019

Người viết Luận văn

Phạm Thanh Tùng

Mục lục

Lời nói đầu

Vành và môđun Cohen-Macaulay là lớp vành và môđun quan trọng trong Đại số giao hoán, Hình học Đại số, Lý thuyết bất biến và Đại số tổ hợp. Có nhiều lớp vành và môđun là mở rộng (theo các khía cạnh khác nhau) của lớp vành và môđun Cohen-Macaulay được các nhà toán học quan tâm nghiên cứu: vành và môđun Cohen-Macaulay suy rộng [13], vành và môđun Cohen-Macaulay dãy [12],...

Một mở rộng khác của vành và môđun Cohen-Macaulay nảy sinh từ tính chất của độ sâu. Trong cuốn sách "Commutative Algebra" [8, (15.C), p.97], Matsumura đã chỉ ra $\operatorname{depth}(P, M) = \operatorname{depth}(P_P, M_P)$, với mọi $P \in \operatorname{Supp}(M)$. Tuy nhiên Matsumura đã đính chính trong cuốn sách "Commutative ring theory" [9, Exercise 136, p.132] (xem thêm [3, Lemma 18.1]) bằng yêu cầu chỉ ra ví dụ về vành và iđêan thỏa $\operatorname{depth}(P, M) < \operatorname{depth}(P_P, M_P)$. Y. Han trong bài báo "D-rings", Acta Math. Sinica, **4**, 1047–1052, 1998 [4], đã định nghĩa vành R thỏa mãn $\operatorname{depth}(P, R) = \operatorname{depth}(P_P, R_P)$, với mọi $P \in \operatorname{Spec}(R)$ mà ông gọi là "D-ring". M.C. Kang trong bài báo "Almost Cohen-Macaulay", *Comm. Algebra*, **29(2)**, 781-787, 2001 [6], đã định nghĩa tổng quát cho môđun và đổi tên thành môđun hầu Cohen-Macaulay. Định nghĩa của M. C. Kang như sau

Cho R là một vành Noether giao hoán $M \neq 0$ là R-môđun hữu hạn sinh. Môđun M được gọi là *hầu Cohen-Macaulay* nếu $\operatorname{depth}(P, M) = \operatorname{depth}(P_P, M_P)$, với mọi $P \in \operatorname{Supp}(M)$. Vành R được gọi là *hầu Cohen-Macaulay* nếu nó là môđun hầu Cohen-Macaulay trên chính nó.

Mục đích của luận văn là tìm hiểu về lớp vành và môđun hầu Cohen-Macaulay dựa trên 2 bài báo

1. M. C. Kang (2001), "Almost Cohen-Macaulay", *Comm. Algebra*, **29(2)**, 781-787.

2. C. Ionescu (2015), "More properties of almost Cohen-Macaulay rings", *J.*

Comm. Algebra, **3**, 363-372.

Luận văn được chia làm 2 chương. Chương 1 trình bày một số kiến thức chuẩn bị về môđun mở rộng, chuyển phẳng, chiều của vành và môđun. Chương 2 trình bày về vành và môđun hầu Cohen-Macaulay. Để thấy được mối liên hệ với lớp vành và môđun Cohen-Macaulay trong chương này luận văn trình bày khá chi tiết một số kết quả về dãy chính quy, độ sâu và môđun Cohen-Macaulay. Tài liệu tham khảo chính của mục này là [2], [9]. Mục tiếp theo trình bày định nghĩa và một số tính chất cơ bản của vành và môđun hầu Cohen-Macaulay. Tính hầu Cohen-Macaulay khi chia cho một phần tử, của vành đa thức, vành các chuỗi lũy thừa hình thức, qua chuyển phẳng, đầy đủ hóa, đặc trưng tính hầu Cohen-Macaulay qua hệ tham số, qua điều kiện (C_k), ... được trình bày ở các mục tiếp theo của chương.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của TS Trần Nguyên An - giảng viên khoa Toán Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy, người đã hướng dẫn tôi cách đọc tài liệu, nghiên cứu khoa học đúng đắn, tinh thần làm việc nghiêm túc và đã dành nhiều thời gian, công sức giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo của Viện Toán học và Đại học Thái Nguyên những người đã tận tình giảng dạy và khích lệ, động viên tôi vượt qua những khó khăn trong học tập.

Tôi xin cảm ơn Ban lãnh đạo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Khoa Toán đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian tôi học tập.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn bạn bè, người thân đã giúp đỡ, động viên, ủng hộ tôi để tôi có thể hoàn thành tốt luận văn cũng như khóa học của mình.

Thái nguyên, ngày 10 tháng 5 năm 2019

Người viết Luận văn

Phạm Thanh Tùng

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong toàn bộ chương này ta luôn giả thiết R là một vành giao hoán.

1.1 Môđun mở rộng

Để định nghĩa khái niệm môđun mở rộng, trước hết ta đưa ra khái niệm giải tự do của môđun.

Định nghĩa 1.1.1. Cho M là một R-môđun. Một giải xạ ảnh (tự do) của M là một phức của các môđun xạ ảnh $P_\bullet$ và ánh xạ $\pi : P_0 \to M$ sao cho

$$\ldots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

là một dãy khớp.

Ví dụ 1.1.2. Xét $\mathbb{Z}_2$ như một $\mathbb{Z}$-môđun. Khi đó một giải xạ ảnh của $\mathbb{Z}_2$ là

$$\cdots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}_2 \to 0$$

trong đó j là phép nhân 2 và p là phép chiếu tự nhiên.

Mệnh đề 1.1.3. *Mỗi môđun M có một giải tự do.*

Chứng minh. Chọn F_0 là một R-môđun tự do sao cho có một toàn cấu $\alpha : F_0 \to M$. Đặt

$$S_1 = \operatorname{Ker}(F_0 \to M) = \operatorname{Ker}\alpha.$$

Chọn F_1 là một môđun tự do sao cho có một toàn cấu $p_1 : F_1 \to S_1$. Đặt $d_1 = j_1 p_1 : F_1 \to F_0$, trong đó $j_1 : S_1 \to F_0$ là phép nhúng tự nhiên.Vì p_1 là toàn cấu nên $\operatorname{Im} d_1 = j_1(p_1(F_1)) = j_1(\operatorname{Ker}\alpha) = \operatorname{Ker}\alpha$. Tương tự như vậy ta tiếp tục đặt

$$S_{i+1} = \operatorname{Ker}(F_i \to S_i).$$

với F_i là các môđun tự do. Khi đó ta có thể viết quy nạp thành các dãy khớp

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0, \\ 0 & \longrightarrow & S_{i+1} & \longrightarrow & F_i & \longrightarrow & S_i & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Đặt dãy khớp ngắn ở trên với nhau sao cho mỗi S_i nối với một dãy khớp ngắn, ta có

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & 0 & & & & \\
& S_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\
\dots \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, "d_2"'] & & F_1 \arrow[rr, dashed, "d_1"'] \arrow[dr] & & F_0 \arrow[r, "\alpha"] & M \arrow[r] & 0 \\
& & & S_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Từ đó ta có một giải tự do của M

$$\cdots \to F_3 \xrightarrow{d_2} F_2 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\alpha} M \to 0,$$

trong đó mỗi F_i là một R-môđun. □

Hệ quả 1.1.4. *Mỗi R-môđun M đều có một giải xạ ảnh.*

Định nghĩa 1.1.5. Cho M là R-môđun. Một giải nội xạ của M là một phức của các môđun nội xạ $E_\bullet$ và ánh xạ $i : M \to E_0$ sao cho dãy

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\ i\ } E^0 \xrightarrow{\ d^0\ } E^1 \xrightarrow{\ d^1\ } E^2 \longrightarrow \dots$$

là khớp.

Ví dụ 1.1.6. Một giải nội xạ của $\mathbb{Z}$-môđun $\mathbb{Z}$ là

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0 \to 0 \to \cdots$$

Định lý 1.1.7. *Mọi R-môđun có thể nhúng vào một R-môđun nội xạ.*

Mệnh đề 1.1.8. *Mỗi R-môđun có một giải nội xạ.*

Chứng minh. Thật vậy, cho M là R-môđun, theo Định lí 1.1.7 tồn tại R- môđun nội xạ E^0 và đơn cấu $i : M \to E^i$. Đặt $C^1 = \operatorname{Coker}(M \hookrightarrow E^0)$. Tiếp tục như vậy giả sử ta xây dựng được R- môđun C^i. Tồn tại E^i là R-môđun nội xạ và đơn cấu $C^i \to E^0$. Đặt $C^{i+1} = \operatorname{Coker}(C^i \hookrightarrow E^i)$. Ta có các dãy khớp sau

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow C^i \longrightarrow E^i \longrightarrow C^{i+1} \longrightarrow 0$$

Sắp xếp lại các dãy khớp trên ta được

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[dr] & & 0 \\
 & & & & & C^2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & E^0 \arrow[rr, dashed, "d^0"] \arrow[dr] & & E^1 \arrow[rr, dashed, "d^1"] \arrow[ur] & & \dots \\
 & & & C_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Do đó ta nhận được một giải nội xạ của M. $\square$

Định nghĩa 1.1.9. Xét một giải xạ ảnh bất kì của R-môđun M

$$\dots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

Tác động hàm tử $\operatorname{Hom}_R(-, N)$ vào giải trên ta được phức $\operatorname{Hom}_R(P_\bullet, N)$

$$0 \xrightarrow{d_0^*} \operatorname{Hom}_R(P_0, N) \xrightarrow{d_1^*} \operatorname{Hom}_R(P_1, N) \xrightarrow{d_2^*} \operatorname{Hom}_R(P_2, N) \longrightarrow \dots$$

trong đó $d_0^* = 0$. Ta định nghĩa

$$\operatorname{Ext}_R^i(M, N) = H^i(\operatorname{Hom}_R(P_\bullet, N)) = \frac{\operatorname{Ker}(d_{i+1}^*)}{\operatorname{Im}(d_i^*)}.$$

Mệnh đề 1.1.10. *Định nghĩa $\operatorname{Ext}_R^i(M, N)$ không phụ thuộc vào việc chọn giải xạ ảnh của M.*

Định nghĩa 1.1.11. Xét một giải nội xạ bất kì của R-môđun M

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\ i\ } E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \dots$$

Tác động $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ ta có phức $\mathrm{Hom}_R(M, E^\bullet)$

$$0 \xrightarrow{d_*^{-1}} \mathrm{Hom}_R(M, E^0) \xrightarrow{d_*^0} \mathrm{Hom}_R(M, E^1) \xrightarrow{d_*^1} \mathrm{Hom}_R(M, E^2) \longrightarrow \dots$$

trong đó $d_*^{-1} = 0$. Ta định nghĩa

$$\mathrm{ext}_R^i(M, N) = H^i(\mathrm{Hom}_R(M, E^\bullet)) = \frac{\mathrm{Ker}(d_*^i)}{\mathrm{Im}(d_*^{i-1})}.$$

Mệnh đề 1.1.12. *Định nghĩa $\mathrm{ext}_R^i(M, N)$ không phụ thuộc vào việc chọn giải nội xạ của M.*

Mệnh đề 1.1.13. *Ta có $\mathrm{Ext}_R^i(M, N) \cong \mathrm{ext}_R^i(M, N)$ với mọi i.*

Chú ý 1.1.14. Do $\mathrm{Ext}_R^i(M, N) \cong \mathrm{ext}_R^i(M, N)$ nên ta đồng nhất chúng và gọi là *môđun mở rộng thứ i* của M và N, kí hiệu $\mathrm{Ext}_R^i(M, N)$.

Mệnh đề 1.1.15. Cho dãy khớp của các R-môđun

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0.$$

Ta có dãy khớp dài của các môđun Ext

$$\begin{array}{l}
0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M'', N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M', N) \\
\qquad \mathrm{Ext}_R^1(M'', N) \xrightarrow{\quad \delta_1 \quad} \dots \longrightarrow \mathrm{Hom}_R^{n-1}(M', N) \\
\qquad \mathrm{Ext}_R^n(M'', N) \xrightarrow{\delta_{n-1}} \mathrm{Ext}_R^n(M, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(M', N) \\
\qquad \mathrm{Ext}_R^{n+1}(M'', N) \xrightarrow{\delta_{n-1}} \mathrm{Ext}_R^{n+1}(M, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n+1}(M', N) \longrightarrow \dots
\end{array}$$

Mệnh đề 1.1.16. *Cho một dãy khớp của các R-môđun,*

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0.$$